Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION DE 1987

Mathématiques III

OPTION : Économique

Mercredi 6 Mai 1987, de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

EXERCICE 1

On considère la fonction numérique f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{1}{2} \ln x.$$

1) Étudier la variation de f et construire la courbe représentative de cette fonction.

2) Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à la parabole d'équation :

$$y = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

3) Pour tout élément x de l'intervalle $]0, 1[$, calculer $\int_x^1 f(t)\,dt$.

En déduire $\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 f(t)\,dt$.

4) Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 3.

a) Calculer :

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right].$$

On utilisera la relation : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Prouver que :

$$\int_{1/n}^{1} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{1/n}^{1} f(t)\,dt.$$

5) A l'aide des questions précédentes, montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = -1.$$

EXERCICE 2

I. On considère la matrice carrée d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver toutes les matrices carrées réelles B d'ordre 3 telles que $AB = 0$. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel formé par ces matrices B.

2) Trouver toutes les matrices carrées réelles B d'ordre 3 telles que $AB = BA = 0$. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel formé par ces matrices B.

3) Calculer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable? Si oui, expliciter une base de vecteurs propres.

II. Plus généralement, soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{R}$, où n est un nombre entier naturel non nul. On considère des endormorphismes u et v de E.

1) On suppose que :

$$uv = vu = 0.$$

a) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

b) Montrer que :

$$\dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Ker}(v) \geqslant n.$$

2) On suppose que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Montrer que $uv = vu = 0$.

3) La propriété $uv = 0$ implique-t-elle la propriété $vu = 0$? Donner éventuellement un contre-exemple.

EXERCICE 3

Pour tout nombre entier naturel n tel que $n \geqslant 4$, on pose :

$$f_n(x) = 0 \qquad \text{si } x < 0,$$

$$f_n(x) = \frac{a_n}{(x+1)^n} \qquad \text{si } x \geqslant 0,$$

où a_n est un réel.

1) Pour quelle valeur de a_n la fonction f_n est-elle une densité de probabilité?

2) On prend désormais pour a_n la valeur trouvée dans la question 1*j*). On note X_n une variable aléatoire réelle de densité f_n.

a) Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n.

b) On pose $Y_n = X_n + 1$. Calculer l'espérance et la variance de Y_n. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

3) Soit $Z_n = -X_n$.

a) Trouver la fonction de répartition G_n et la densité de probabilité g_n de Z_n.

b) Pour tout nombre réel x, on pose $G(x) = \lim_{n \to +\infty} G_n(x)$. Montrer que la fonction G ainsi définie est une fonction de répartition. Quelle est la loi de probabilité d'une variable aléatoire Z ayant G pour fonction de répartition?

H.E.C.-ECOLES SUPERIEURES de COMMERCE de PARIS et LYON
Sup.Co.PARIS, Math 3 (option économique)
page 269
1987